

Análisis Funcional

Examen I

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA





Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen I

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Descripción Parcial 2.

Fecha 20 de diciembre de 2024.

Ejercicio 1 (5 puntos). Sean E un espacio de Banach y $\{f_n\}$ una sucesión en el espacio dual E^* y $f \in E^*$. Probad que

$$\{f_n\} \xrightarrow{*} f \iff \{\langle f_n, x \rangle\} \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E$$

Ejercicio 2 (5 puntos). Sean $C \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H y $T : C \rightarrow C$ una aplicación verificando

$$\|Tu - Tv\| \leq \|u - v\| \quad \forall u, v \in C$$

a) Probad que si existe una sucesión $\{u_n\} \subset C$ verificando

$$\{u_n\} \rightharpoonup u \quad \text{y} \quad \{u_n - Tu_n\} \rightarrow f$$

entonces $u - Tu = f$.

(**Pista:** Empieza por el caso $C = H$ y usa la desigualdad

$$\langle (u - Tu) - (v - Tv), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v$$

b) Deduce que si C es además acotado, entonces T tiene un punto fijo.

(**Pista:** Considera $T_\varepsilon u = (1 - \varepsilon)Tu + \varepsilon a$ siendo $a \in C$ fijo y $\varepsilon > 0$, con $\varepsilon \rightarrow 0$.)